Examen General de conocimientos

Topología Diferencial

Instrucciones: Los problemas 1, 5 y 7 son obligatorios. Se debe elegir sólo un problema entre los ejercicios 2 y 3 y se debe elegir sólo un problema entre los ejercicios 4 y 6.
Por diferenciable se entiende infinitamente diferenciable.

1. a) Dé un homeomorfismo h entre los conjuntos
$$S^n = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\overline{x}\| = 1\}$$
y
$$C_{n+1} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid máx\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n+1}|\} = 1\}.$$
Concluya que C_{n+1} tiene una única estructura diferenciable tal que h es difeomorfismo
   b) Sea $(\mathscr{M}, \mathscr{A})$ una k-variedad con estructura diferenciable $\mathscr{D}(\mathscr{A})$. Considere $\mathscr{B}$ otro atlas de $\mathscr{M}$ y $\mathscr{D}(\mathscr{B})$ su estructura diferenciable. Demuestre que $\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \mathscr{D}(\mathscr{B})$ si y sólo si $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ es atlas de $\mathscr{M}$.
Además muestre que $(\mathbb{R}, \{Id\})$ y $(\mathbb{R}, \{x^3\})$ tienen diferentes estructuras; sin embargo son difeomorfas.

2. a) Demuestre que $\mathbb{R}P^n$ es orientable si y sólo si n es impar.
   b) Demuestre que la inclusión canónica $S^n \subseteq S^{n+1}$ induce un encaje de $\mathbb{R}P^n$ en $\mathbb{R}P^{n+1}$ y que $\mathbb{R}P^{n+1} - \mathbb{R}P^n$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. a) Sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ variedades sin frontera, $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ conexas. Demuestre que si $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ es orientable, entonces $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ son orientables.
   b) Sean $M(n, n, \mathbb{R})$ y $Sim(n, n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de n por n con coeficientes en $\mathbb{R}$ y el conjunto de matrices simétricas de n por n con coeficientes en $\mathbb{R}$, respectivamente. Considere el mapeo $f : M(n, n, \mathbb{R}) \longrightarrow Sim(n, n, \mathbb{R})$ dado por $f(A) = A \cdot A^t$. Muestre que f tiene a I_n como valor regular y que $f^{-1}(I_n)$ es una $\frac{n(n-1)}{2}$ subvariedad compacta.

4. a) Sea $\overline{f}$ un germen de $(\mathbb{R}, 0)$ a $\mathbb{R}$. Demuestre que se tienen sólo dos casos, para $f(0) = 0$.
      i) f es equivalente al germen de $\pm x^n$.
      ii) f y todas sus derivadas se anulan en 0.
   b) Sea $\mathscr{M}^k \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad. Demuestre que la suma de Whitney $T\mathscr{M}^k \oplus \perp \mathscr{M}^k$, donde $\perp \mathscr{M}^k$ es el haz normal sobre $\mathscr{M}^k$, es un n-haz trivial

5. a) Sean A un cerrado de una variedad $\mathscr{M}^n$ y U un abierto de $\mathscr{M}^n$ tales que $U \supseteq A$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable, demuestre que existe $g : \mathscr{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable con $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.
   b) Defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Demuestre que
      i) f es una inmersión.
      ii) $f\mid_{(-1,\infty)}: (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una inmersión inyectiva pero no un encaje. (Sugerencia: la imagen de f satisface $x^3 + x^2 = y^2$ en $\mathbb{R}^2$.)

6. Sea X una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que para l un número natural fijo, $0 < l \leq n$, casi todo subespacio V, con $dim_{\mathbb{R}}(V) = l$, intersectan a X transversalmente.

7. a) Demuestre que la ecuación $z^2 = e^{-|z|^2}$ tiene dos soluciones en el plano complejo dentro de S^1.
   b) Demuestre que $f : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $f(z) = \overline{z}^{\,m}$ tiene grado $-m$. ($\overline{z}$ denota el conjugado de z en los numeros complejos.)

México D.F.; Facultad de Ciencias; UNAM
Dr. León Kusner