Examen General de Topología Diferencial

Semestre 2017-1
19 de Enero de 2017
Salón S-102, Departamento de Matemáticas
Hora: 9 a.m. - 1 p.m.

*Lee cuidadosamente todos los ejercicios antes de comenzar. Justifica detalladamente cada afirmación que uses. Resuelve cuatro ejercicios, los indicados con * son obligatorios. Diferenciable significa de clase C^∞.*

1. Demuestre lo siguiente
   - Si $(M, \mathcal{A})$ es variedad diferenciable, entonces existe $\mathcal{B}$ atlas contable (finito o numerable) que genera la misma estructura de M.
   - Demuestre que $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   - Dé explicitamente un atlas en el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con dos cartas.
2. * Sea (E^n, π, M) un n-haz diferenciable. M conexa. Demuestre que E es trivial si y sólo si existen secciones $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ diferenciables, tal que para toda $m \in M$ el conjunto $\{\sigma_1(m), \sigma_2(m), ..., \sigma_n(m)\}$ es linealmente independiente. Usando esto concluya que $T\mathbb{S}^1$ es trivial.
3. * a) Sea $f : M \to N$ diferenciable, $n_0 \in im(f)$ valor regular. Suponer que en bases fijas de $T_{m_0}M$ y $T_{n_0}N$, $T_{m_0}f$ está dada por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
   Calcule $T_{m_0}(f^{-1}(n_0))$ en esas bases.

   b) Sea M^n compacta $f : M \to \mathbb{R}^k$ diferenciable, N subvariedad de $\mathbb{R}^k$. Dado $\varepsilon > 0$, demuestre que existe $v \in \mathbb{R}^k$, $\|v\| < \varepsilon$ tal que $f(x) + v$ es transversal a N.
4. a) Sea X^k subvariedad de $\mathbb{R}^N$. Demuestre que existe $l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, lineal, cuya restricción a X es de Morse.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n > 1$, diferenciable, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\varepsilon > 0$. Demuestre que existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, tal que para toda $x \in K : dg(x) \neq 0$ y $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

5. * a) Sea $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-1} z + a_m$ un polinomio, con $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que si $r^m > |a_1| r^{m-1} + ... + |a_{m-1}| r + |a_m|$, entonces $p(z)$ tiene una raíz en la bola de radio r con centro en el origen.

   b) Demuestre que $z^2 = e^{-|z|^2}$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$. ¿Podría especificar el mínimo radio de la bola centrada en el origen donde están dos ceros: z_0 y $-z_0$?