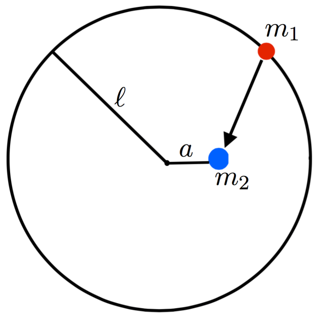
Examen General de Medios Continuos

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los problemas que está resolviendo.

1. Una partícula de masa m_1 se mueve en un círculo de radio ℓ bajo la atracción gravitacional de una masa m_2 que está fija, localizada en el interior del círculo a una distancia $0 < a < \ell$ del centro (ver figura).



   (a) Encontrar el Lagrangiano del sistema.
   (b) Encontrar el Hamiltoniano.
   (c) Hacer un dibujo cualitativo del plano de fases. Clasificar los puntos de equilibrio del sistema de acuerdo a su estabilidad.
   (d) Para los equilibrios estables del sistema, encontrar el periodo de pequeñas oscilaciones.
   (e) Suponga que al tiempo inicial la masa m_1 está alineada con la masa m_2 y el centro del círculo ¿Qué velocidad angular debe tener la masa m_1 para garantizar que de una vuelta completa al círculo? Se deben considerar dos casos.

2. Sea $H : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definida por $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = (p_1^2 + p_2^2)/2m - q_1 - q_2$, la función de Hamilton para un cierto sistema mecánico con dos grados de libertad:

   a) Resuelva las ecuaciones de Hamilton y obtenga soluciones explícitas para $q_1(t)$ y $q_2(t)$.
   b) Escriba la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi y aplique, de ser posible, el método de separación de variables para obtener su solución.
   c) Construya la función de Lagrange asociada a dicho sistema mecánico y resuelva las correspondientes ecuaciones de Lagrange.

3. Sea el Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}, t) = n(q, t)(1 + |\dot{q}|^2)^{1/2}, \tag{1}$$

   donde $q \in \mathbf{R}^2$, $|\cdot|$ denota la norma euclideana en $\mathbf{R}^2$, y $n : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ es una función positiva dada. Este es el Langrangiano de Fermat, y modela la propagación de rayos de luz.

a) Escriba el momento canónico p y el Hamiltoniano $H(q, p, t)$ del sistema. Indique el dominio de esta función. Note la relación $|p|^2 = |\dot{q}|^2(n^2 - |p|^2)$. Explique porque tenemos que restringir $|p| < n(q, t)$.

b) Considere el caso $n = n(|q|)$. Escriba las ecuaciones Euler-Lagrange y muestre que el sistema tiene dos cantidades conservadas. Use esto para simplificar la ecuación para el radio $r = |q|$.

4. Sea T un cuerpo rígido representado por un triángulo equilátero, plano, y de densidad constante. Determinar:

   a) Los momentos principales de inercia de T.

   b) El centro de masa de T.

   c) La frecuencia de las pequeñas oscilaciones del péndulo físico T que oscila alrededor de un eje que es perpendicular al plano del triángulo y que pasa por uno de sus vértices, en el campo de la gravedad.