EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2015-I
21 DE ENERO DEL 2015

Duración: 6 horas
Instrucciones:

(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
(4) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathscr{F})$. Pruebe que si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ coinciden en un π-sistema $\mathscr{C}$ que genera a $\mathscr{F}$ entonces $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ coinciden en $\mathscr{F}$.

Problema 2. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribuciones F y G y funciones características ϕ y ψ. Pruebe que la identidad de Parseval

$$\int \phi(y)\, e^{-iuy}\, G(dy) = \int \psi(x-u)\ F(dx)$$

se deduce al calcular

$$\mathbb{E}\big(e^{iXY-iuY}\big)$$

de dos maneras distintas al condicionar ya sea respecto de X o respecto de Y.

Problema 3. Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias tales que para cualesquiera $\varepsilon, \eta > 0$ existe N tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) < \eta.$$

Pruebe que existe una variable aleatoria X y una subsucesión $(X_{n_k}, k \geq 1)$ tales que $X_{n_k} \to X$ casi seguramente conforme $k \to \infty$.

Problema 4. Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes tales que X_i tiene distribución Bernoulli de parámetro $1/i$. Pruebe que si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ entonces $S_{i^n}/n \log(i)$ converge casi seguramente a 1. *Sugerencia:* Primero calcule $H_n = \mathbb{E}(S_n)$ y vea que es asintótico a $\log(n)$. Luego, acote superiormente a $\mathbb{E}\big((S_{i^n} - H_{i^n})^4\big)$ y razone como en la prueba de la ley fuerte de los grandes números para variables con cuarto momento finito.

2. Procesos estocásticos

Problema 5. Sean M y N dos martingalas ortogonales (ie su producto también es una martingala) y $S \leq T_1, T_2$ tiempos de paro acotados, todo respecto de una filtración $(\mathscr{F}_s)$. Pruebe que

$$\mathbb{E}(M_{T_1} N_{T_2} \mid \mathscr{F}_S) = M_S N_S.$$

Sugerencia: note que $S \leq T_1 \wedge T_2$ y considere qué sucede sobre el evento $\{T_1 \leq T_2\} \in \mathscr{F}_{T_1 \wedge T_2}$.

Problema 6. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables independientes con función de distribución F. Defina $R_1 = 1$ y recursivamente

$$R_k = \min \{n \geq R_{k-1} : X_n \geq X_1, \ldots, X_{n-1}\}.$$

Pruebe que $(R_k, k \geq 1)$ es una cadena de Markov y determine la matriz de transición.

Problema 7. Sean $S_1, S_2, \ldots$ variables aleatorias independientes y exponenciales de parámetro λ. Sean $T_0 = 0$ y $T_n = S_1 + \cdots S_n$ para $n \geq 1$.

(1) Pruebe que para toda $t \geq 0$, casi seguramente $\{n \in \mathbb{N} : T_n > t\} \neq \emptyset$.
(2) Construya al proceso
$$N_t = \min \{n \in \mathbb{N} : T_n > t\}$$
y sea $\mathscr{F}_t = \sigma(N_s : s \leq t)$. Pruebe que $N_t/t \to \lambda$ casi seguramente conforme $t \to \infty$.

Problema 8. Sean $(N_A : A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ variables aleatorias gaussianas centradas tales que para $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, el vector $(N_{A_1}, \ldots, N_{A_n})$ es gaussiano y

$$\mathbb{E}\big(N_{A_i} N_{A_j}\big) = \mathrm{Leb}(A_i \cap A_j).$$

Sean $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ ajenos por pares y sea $A = \bigcup_i A_i$

(1) Pruebe que $N_{A_1}, N_{A_2}, \ldots$ son independientes.
(2) Pruebe que si $S_n = \sum_{j=1}^n N_{A_j}$ entonces $S_n \to N_A$ en L_2 conforme $n \to \infty$.