Examen General de Teoría de las Gráficas

Duración: 4 horas. Responder 6 de los siguientes 9 ejercicios (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificarán los 6 primeros). Para aprobar el examen es necesario contestar correctamente al menos 4 ejercicios. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

1. Demuestra que si T es un torneo de orden $4r$ con $r \geq 1$, donde $2r$ vértices de T tienen exgrado $2r$ y los otros $2r$ vértices tiene exgrado $2r-1$, entonces T es fuertemente conexo.

2. Demuestra que una gráfica conexa y no trivial, G, es euleriana si y sólo si $E(G)$ se puede partir en subconjuntos E_i, $1 \leq i \leq k$, donde cada subgráfica inducida por el conjunto de aristas E_i es un ciclo.

3. Sea G una gráfica de orden n sin vértices aislados. Demuestra que el número de dominación de G, $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

4. Demuestra el teorema de Berge: Un apareamiento M en una gráfica G es máximo en G si y sólo si G no tiene trayectorias M-aumentantes.

5. Prueba que una gráfica plana es 2-conexa si y sólo si el camino frontera de toda cara es un ciclo.

6. Determina el número máximo de aristas en una gráfica simple outerplana con n vértices.

7. Demuestra que toda gráfica bipartita es perfecta.

8. Demuestra el teorema de flujo máximo y corte mínimo: En cualquier red, el valor de un flujo máximo es igual a la capacidad de un corte mínimo.

9. Para cualquier par de enteros $k, l \geq 2$, demuestra que el número de Ramsey $r(k, l)$ cumple que:

$$r(k, l) \leq r(k, l-1) + r(k-1, l).$$