<u>DURACION DEL EXAMEN: 3 HORAS</u>

# EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA

I. Demostrar que cualquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de una variedad proyectiva a una variedad afín es constante, es decir, la imagen de $X$ es un punto.

II. Dado el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \qquad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 && (1)\\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2), && (2)\end{aligned}$$

sea $Y := \varphi(\mathbb{P}^1)$. Demuestre que $\mathbb{P}^1$ y $Y$ son variedades proyectivas isomorfas, pero que sus anillos de coordenadas homogéneos $S(\mathbb{P}^1)$ y $S(Y)$ no son isomorfos.

III. Dada la variedad proyectiva

$$X = \left\{ (x_0 : x_1 : x_3 : x_4) \,\middle|\, \text{rank} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} < 1 \right\} \subset \mathbb{P}^4$$

a. Demuestre que hay un morfismo $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$, que sobre el subconjunto abierto de $X$ donde $(x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$ está dado por la proyección $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$, y

b. para cada punto $p \in \mathbb{P}^2$, determine la imagen inversa $\varphi^{-1}(p)$.

IV. Sea $V := V(I) \subset \mathbb{A}^3$ el conjunto algebraico correspondiente al ideal $I = (x^2 - yz, xz - x)$. Encuentra las componente irreducibles de $V$.

V. Sea $C \subset \mathbb{A}^2$ la variedad afín definida por la ecuación .

$$y^2 = x^3 + 1$$

a. Probar que $C$ es no singular y que su cerradura proyectiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ es no singular.

b. Sea $f : C \to \mathbb{A}^1$ el morfismo de variedades afines dado por $(x, y) \mapsto y$. Probar que f se extiende a un morfismo de variedades proyectivas $\overline{f} : \overline{C} \to \mathbb{P}^1$.

VI. Sea $X = V(y - xz) \subset \mathbb{A}^3$. Demuestra que hay líneas $L \subset X$ y $M \subset \mathbb{A}^2$ tal $X \setminus L$ es isomorfo a $\mathbb{A}^2 \setminus M$.
*Sugerencia: Considere la proyección $(x, y, z) \to (x, y)$.*