Exámen General de Finanzas Matemáticas

28 de junio , 2016.
Duración: 8-14 hrs.

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Consideren un modelo financiero con dos momentos en el tiempo $t = 0, 1$ y dos activos financieros

   - Una tasa libre de riesgo r
   - Un activo libre de riesgo S^0
   - Un activo riesgo S^1.

   Supongan que S_1^1 puede tomar sólo los valores $S_0^1(1+a)$ y $S_0^1(1+b)$ donde $-1 < a < r < b$. Denotemos por R a la tasa de retorno de S^1.

   a) ¿Qué valores puede tomar R?

   b) Muestre que bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ definida por

   $$\mathbb{P}^*(R = a) = \frac{b-r}{b-a}, \qquad \mathbb{P}^*(R = b) = \frac{r-a}{b-a},$$

   el valor esperado de S^1 es igual al retorno r de un activo libre de riesgo.

   c) ¿Existe arbitraje en este modelo ?

   d) ¿Es un mercado completo?

   e) Considere un derivado con payoff D dado por

   $$D = \begin{cases} \alpha & \text{si } R = a \\ \beta & \text{si} R = b. \end{cases}$$

   Mostrar que el portafolio (η, ξ) definido por

   $$\eta = \frac{\alpha(1+b) - \beta(1+a)}{S_0^0(1+r)(b-a)}, \qquad \xi = \frac{\beta - \alpha}{S_0^1(b-a)}$$

   define una cobertura de D

   f) Calcule el precio de arbitraje para el portafolio (η, ξ).

g) Mostrar que

$$\pi(D) = \frac{1}{(1+r)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[D].$$

y dar una interpretación.

2. Considere el modelo CRR con el activo libre de riesgo S^0 y el riesgoso S^1. Para $n \geq 1$ se define ($S_0^0 = 1$)

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

y

$$S_n^1 = S_{n-1}^1 R_n,$$

donde R_n satisface

$$R_n = \begin{cases} u & \text{con probabilidad} p \\ d & \text{con probabilidad} 1-p \end{cases}$$

$0 < d < 1 + r < u$.

a) Sea $\mathscr{C}_n$ el valor a tiempo n de una opción Americana descrita por la sucesión de pay-off $\{Z_n\}$ y C_n el valor a tiempo n de una opción Europea definida por la variables aleatoria Z_N. Demostrar:

1) $\mathscr{C}_n \geq C_n$
2) Si $C_n \geq Z_n$ para toda $n \geq 1$, entonces $\mathscr{C}_n = C_n$ para $n \in \{0, 1 \ldots, N\}$
3) Si $Z_n = (S_n^1 - K)^+$ entocnes $\mathscr{C}_n = C_n$

b) Supongamos que $d = u^{-1}$. Proponer un algoritmo para calcular el precio y cobertura en cada momento n de la opción Europea **Knock-out** dada por:

$$KO_N = \begin{cases} (S_N - K)^+ & \text{si} \quad Y_N = \text{máx}\{S_0^1, \ldots, S_0^1\} < K_1 \\ 0 & \text{si} \quad Y_N = \text{máx}\{S_0^1, \ldots, S_0^1\} \geq K_1 \end{cases}$$

donde $K < K_1$ y $S_0^0 < K_1$.

Finanzas a tiempo continuo.

3. Consideremos que la tasa de interés a corto plazo bajo el modelo CIR sigue lla ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

donde W_t es un movimiento Browniano con $W_T - W_t \sim N(0, T-t)$ para $T > t$ y $W_0 = 0$. Encontrar el precio de un bono libre de riesgo como función del tiempo t y vencimiento T, $P = P(t, T, r_t)$.

4. En el modelo de Black & Scholes,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

con tasa de interés instantánea $r > 0$, demuestre que el precio p_g de un derivado europeo, $g(S_T)$ (para alguna función g), está dado por

$$p_g = e^{-rT}E\left(g\left(S_0 e^{rT}\frac{S_T}{E(S_T)}\right)\right).$$

Teoría del Riesgo.

Las siguientes preguntas hacen referencia al proceso de riesgo $\{R(t) : t \geq 0\}$ dado por

$$R(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

en donde $u \geq 0$ es el capital inicial, $\beta > 0$ es una constante, $U_1, U_2, \ldots$ son v.a.s i.i.d., no negativas, con función de distribución $F(x)$, correspondientes al monto de las reclamaciones y $\{N_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo de parámetro $\lambda > 0$ e independiente de las reclamaciones. Defina $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Suponga que se satisface la condición de ganancia neta, defina el tiempo de ruina como $\tau = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$ y sea $\psi(u)$ la probabilidad de ruina. El proceso de superhábit (*surplus*) asociado es

$$S(t) = u - R(t) = \sum_{i=1}^{N_t} U_i - \beta t.$$

5. Demuestre las siguientes características de $S(t)$.

   a) $E(S(t)) = (\lambda E(U_1) - \beta)t$.

   b) $\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda t\, E(U_1^2)$.

   c) $E(e^{rS(t)}) = \exp\{\lambda t(E(e^{rU_1}) - 1) - r\beta t\}$.

   d) $\displaystyle \frac{d^k}{dr^k} \ln E(e^{rS(t)})\Big|_{r=0} = \lambda t\, E(U_1^k), \quad \text{para } k \geq 2.$

6. Para $x > 0$ y $y > 0$ defina la función

$$\varphi(u, x, y) = P(\tau < \infty, X > x, Y > y),$$

en donde

$$X = \begin{cases} R(\tau-) & \text{si } \tau < \infty, \\ \infty & \text{si } \tau = \infty. \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -R(\tau) & \text{si } \tau < \infty, \\ \infty & \text{si } \tau = \infty. \end{cases}$$

   a) Demuestre que cuando $h \searrow 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(u,x,y) \;&=\; e^{-\lambda h}\varphi(u+\beta h, x, y) \\ &\quad + \int_0^h [\int_0^{u+\beta t} \varphi(u+\beta t - v, x, y)\, dF(v) \\ &\quad + 1_{(u+\beta t > x)} \cdot \bar{F}(u+\beta t + y)]\lambda e^{-\lambda t}\, dt + o(h). \end{aligned}$$

   b) Concluya que $u \mapsto \varphi(u,x,y)$ es continua por la derecha y que su derivada por la derecha es

$$\frac{\partial^+}{\partial u}\varphi(u,x,y) = \frac{\lambda}{\beta}[\varphi(u,x,y) - \int_0^u \varphi(u-v,x,y)\, dF(v) - 1_{(u>x)} \cdot \bar{F}(u+y)].$$

   c) Sea $u > 0$ y $h > 0$ tal que $u - \beta h > 0$. Demuestre que cuando $h \searrow 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(u-\beta h, x, y) \;&=\; e^{-\lambda h}\varphi(u,x,y) \\ &\quad + e^{-\lambda h}\int_0^h [\int_0^{u-\beta t} \varphi(u-\beta t - v, x, y)\, dF(v) \\ &\quad + 1_{(u-\beta t > x)} \cdot \bar{F}(u - \beta t + y)]\lambda e^{-\lambda t}\, dt + o(h). \end{aligned}$$

   d) Concluya que $u \mapsto \varphi(u,x,y)$ es continua por la izquierda y que su derivada por la izquierda es

$$\frac{\partial^-}{\partial u}\varphi(u,x,y) = \frac{\lambda}{\beta}[\varphi(u,x,y) - \int_0^{u-} \varphi(u-v,x,y)\, dF(v) - 1_{(u>x)} \cdot \bar{F}((u+y)-)].$$