Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Fecha: 1o. de julio, 2015

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

1. Sea la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

con condición inicial $u(x,0) = g(x)$.

(a) Demuestre que una solución u está determinada implícitamente por la relación $u = g(x - ut)$. (Utilice el método de características.)

(b) Calcule el tiempo de formación de singularidades (ondas de choque) para el caso en que

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

2. (a) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, y $u \in C(\Omega)$. Suponiendo que u satisface la propiedad del promedio,

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R|} \int_{\partial B_R(x)} u(y)\, dS_y,$$

para toda bola $B_R(x) \subset \Omega$, $R > 0$, y que $\sup_\Omega u < +\infty$, demuestre el principio débil del máximo:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

(b) Aplique el principio débil del máximo para demostrar que si existe una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ al problema,

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= g \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

con $g \in C(\partial\Omega)$ y $f \in C(\Omega)$, entonces ésta es única.

3. (a) Utilice la fórmula de Poisson en la bola para demostrar la desigualdad de Harnack explícita en una bola de radio $r > 0$:

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0).$$

para toda $x \in B_r(0)$.

(b) Utilice la desigualdad de Harnack del inciso anterior para demostrar el teorema de Liouville: toda función armónica acotada en $\mathbb{R}^n$ es constante.

4. Considere el problema de Cauchy para la ecuación de onda en una dimensión espacial,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ c > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

(a) Deduzca la fórmula de d'Alembert para la solución de este problema.

(b) Defina las siguientes nociones para un punto en el espacio tiempo $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$: dominio de dependencia, dominio de influencia, región no causalmente relacionada con el punto, y cono de luz.

(c) Encuentre una solución al problema de Cauchy con

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{otro caso}, \end{cases} \qquad g(x) \equiv 0.$$

5. (a) Encuentre una fómula para la solución del siguiente problema:

$$\left.\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}\times[0,\infty), \\ u &= g \quad \text{sobre } \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

con condición inicial

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } (-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,\infty), \\ 1 & \text{en } (-2,-1)\cup(1,2). \end{cases} \tag{4}$$

Exprese su solución de forma implícita en términos de la función error:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$$

(b) Demuestre que la solución del inciso anterior es $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$.