Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen general de ecuaciones diferenciales parciales

Fecha 2 de julio de 2014

Instrucciones:

- **Duración:** 4 horas
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

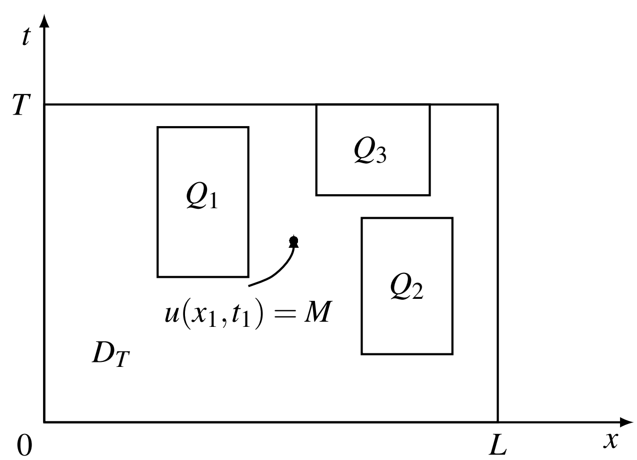
Preguntas

1. Ecuación de onda con disipación.
   Considere
$$\begin{cases} u_{tt}(\mathbf{x},t)+ku_t(\mathbf{x},t)-c^2\Delta u(\mathbf{x},t)=0 & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u(\mathbf{x},0)=0, u_t(\mathbf{x},0)=g(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{1}$$
   (a) Encuentre $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que
$$v(\mathbf{x},t)=e^{\alpha t}u(\mathbf{x},t)$$
   sea solución de una ecuación sin término de primer orden en $\mathbb{R}^2\times\{t\geq 0\}$.

   (b) Encuentre $\beta\in\mathbb{R}$ tal que
$$w(x_1,x_2,x_3,t)=w(\mathbf{x},x_3,t)=e^{\beta x_3}v(\mathbf{x},t)$$
   sea solución de una ecuación que contiene únicamente términos de segundo orden.

   (c) Encuentre una fórmula de solución para el problema original (1).

2. Sea $u=u(x,t)$ una solución de la ecuación del calor, $u_t=u_{xx}$, en un dominio $D_T\subset Q_T:=[0,L]\times[0,T]$, con $T>0$, y tal que $D_T=Q_T\setminus(\overline{Q_1}\cup\overline{Q_2}\cup\overline{Q_3})$, donde Q_1,Q_2 y Q_3 son los rectángulos tal y como se muestra en la figura, y $\overline{Q_1}$ denota la cerradura de Q_1. Suponiendo que u toma su máximo valor M en un punto (x_1,t_1) del interior de D_T, ¿en donde más se tiene que $u(x,t)=M$? Explique su respuesta.



3. *Principio de reflexión de Schwarz*. Sean

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$
$$B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}.$$

Sea $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ y tal que $u(x,0) = 0$. Demuestre que la función

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0, \\ -u(x,-y), & y < 0, \end{cases}$$

es armónica en B_1. *Sugerencia:* Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en B_1, $w = v$ en ∂B_1. Defina $V(x,y) = w(x,y) + w(x,-y)$. Pruebe que $V \equiv 0$.

4. Se dice que una función $u \in C^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ es *subarmónica* en Ω si $-\Delta u \leq 0$ en Ω. Demuestre que:

   (a) Si u es subarmónica entonces para toda bola $B_R(x_0) \subset \Omega$,

   $$u(x_0) \leq \frac{d}{\omega_d R^d} \int_{B_R(x_0)} u(y)\, dy \qquad \text{y,} \qquad u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_d R^{d-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, dS(y).$$

   (b) Si $u \in C(\bar{\Omega})$ es subarmónica entonces el máximo de u se alcanza en $\partial\Omega$.

   (c) Si u es armónica en Ω entonces u^2 es subarmónica en Ω.

   (d) Sea u subarmónica en Ω y : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞. ¿Bajo qué condiciones es $F \circ u$ subarmónica?

5. Considere el siguiente problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_t + u^3 u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x^{2/3}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Encuentre la familia de características de este problema

   (b) Encuentre una fórmula explícita para las soluciones a este problema, estudie su dominio de definición y su comportamiento cuando $t \to 0^+$.

6. Considera el problema del "tope" en el modelo de tráfico:

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{3}$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Encuentre una solución entrópica para todo tiempo $t \geq 0$. Escriba explícitamente la solución. (*Sugerencia:* Dado que la función de flujo es cóncava, las dos discontinuidades de $\rho(x,0)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ producen una onda de choque y una onda de rarefracción, respectivamente.) *Información útil*: el factor integrante de una ecuación de la forma $y'(t) + ay(t) = f$ es $\mu(t) = \exp(\int^t a(s)\, ds)$. Es necesario resolver una ecuación de este estilo para encontrar la segunda onda de choque.
Interprete sus resultados en términos del flujo de tráfico.