

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
EXAMEN GENERAL

Miércoles 2 de julio, 2014

Instrucciones: Resolver todos los problemas
Máximo de tiempo 5 horas

1. Dada la ecuación de segundo orden:

$$\ddot{x} + x^2 - x^4 = 0,$$

utilice la función potencial para esbozar su diagrama en el plano fase. Indique los puntos de equilibrio y algunas trayectorias importantes.

¿Es este sistema conservativo? Explique su respuesta.

2. Existencia de ciclo límite. Enuncie un teorema que le permita decidir si el oscilador descrito por

$$\ddot{x} + x + (3x^2 + 2\dot{x}^2 + 1)\dot{x} = 0$$

contiene, en alguna región invariante acotada, al menos un ciclo límite.

3. Teoría de Floquet

Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema de Floquet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (SF)$$

donde $\mathbf{A}(t)$ es una matriz continua, periódica con período mínimo T , los valores propios μ de

$$\mathbf{C} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$$

se conocen como multiplicadores de Floquet de (SF).

- a) Muestre que los multiplicadores están bien definidos.
b) Muestre que los multiplicadores de la ecuación conocida como Ecuación de Hill dada por $\ddot{x} + q(t)x = 0$ con $q(t)$ periódica para $t \in \mathbb{R}$, satisfacen que $\mu_1\mu_2 = 1$.

4. Considere la ecuación de Duffing

$$\ddot{u} + 4u + \epsilon u^3 = 0 \quad , \quad 0 < \epsilon \ll 1,$$

ϵ parámetro pequeño con condiciones iniciales:

$$u(0) = 0 \quad , \quad \dot{u}(0) = 2a \quad a > 0 \quad cte.$$

Muestre que toda solución en serie de potencias de ϵ , de la forma

$$u = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \dots$$

contiene un término no acotado a orden ϵ .

a) ¿De qué forma es ese término?

b) ¿Qué propone para lograr una mejor aproximación?

5. Considere tres poblaciones con densidades

$$x(t) \quad , \quad y(t) \quad , \quad z(t)$$

con un comportamiento descrito por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax(1-x) - xy \\ \dot{y} &= -by + cxy - dyz \\ \dot{z} &= -kz + yz \end{aligned}$$

los parámetros a, b, c, d y k son positivos.

a) Explique qué significa cada término en el sistema.

b) ¿Cuál es el único punto de equilibrio?

c) De acuerdo al criterio de Routh-Hurwitz ¿Cuál es la estabilidad de ese punto?