Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2017-1

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- Para aprobar el examen es necesario resolver tres ejercicios completamente bien.

1. Encuentra la única solución débil y entrópica al siguiente problema de Cauchy:

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

2. Sea $u \in C^1(\overline{Q_T})$, $Q_T = (0,1) \times (0,T)$, $T > 0$, solución de la ecuación del calor:

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad (x,t) \in Q_T.$$

(a) Para $0 < t_0 \le T$ dado, supongamos que $u(x,t) > m$ para $0 \le x \le 1$, $0 < t < t_0$, y que $u(0,t_0) = m$. Demuestra que $u_x(0,t_0) > 0$. (*Sugerencia:* Compara u con $w(x,t) = e^x - 1$, sub-solución no negativa de la ecuación del calor. Nota que $w(0,t) = 0$ y $w_x(0,t) = 1 > 0$.)

(b) Deduce que la solución al problema de Neumann

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & (x,t) &\in Q_T, \\ u(x,0) &= g(x), & x &\in [0,1], \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0, & t &\in (0,T], \end{aligned}$$

si existe, es única en $C^1(\overline{Q_T})$ y que, además,

$$\min_{[0,1]} g = \min_{\overline{Q_T}} u \le \max_{\overline{Q_T}} u = \max_{[0,1]} g.$$

3. Considera el problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0, & x &\in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) &= g(x), & x &\in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde $f \in C^3(\mathbb{R}^3), g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, y $c \neq 0$ es constante. Suponiendo que los soportes de f y g están contenidos en $B_R(0)$ (la bola de radio $R > 0$ y centro en el origen), describe el soporte de la solución $u = u(x,t)$ para cada tiempo $t > 0$.

4. Sea $u \in C(\mathbb{R}^2)$ una función continua, subarmónica, y acotada superiormente, es decir, existe $M > 0$ tal que $u(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Demuestra que para cualquier $\varepsilon > 0$, la función

$$w^\varepsilon(x,y) := u(x,y) - \varepsilon \log |(x,y)|,$$

satisface

$$\max_{\overline{B_{\text{ext}}}} w^\varepsilon = \max_{\partial B_{\text{ext}}} w^\varepsilon = \max_{\partial B_{\text{ext}}} u,$$

donde $B_{\text{ext}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)| > 1\} = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{B_1(0)}$.

(b) Deduce que u es constante.

5. Encuentra la solución de $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ en el disco

$$B_a(0) = \{(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < a, \, \theta \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

sujeto a la condición de frontera

$$u = 1 + 3\sin\theta, \qquad \text{sobre } r = a.$$