

**Ecuaciones diferenciales ordinarias**  
**Examen de conocimientos generales**  
**20 de Enero de 2016**

- 1) **Sistemas con forzamiento** Sea  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $-1 < b(t) < 2$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ . Describir el comportamiento a largo plazo de las soluciones de la ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dt} + 2y = b(t)$$

Justifica la respuesta con tanta precisión como sea posible.

- 2) **Crecimiento poblacional** Un modelo de crecimiento poblacional dice que la población  $y(t)$  crece de acuerdo a la ley

$$\frac{dy}{dt} = \kappa y^{1+\epsilon}$$

donde  $\kappa, \epsilon > 0$  y  $\epsilon$  es pequeña.

- (a) ¿Cuánto tiempo tarda la población inicial en hacerse infinita?
- (b) Responder la misma pregunta del inciso anterior para el caso  $\epsilon = 0$  y comparar este caso con el caso cuando  $\epsilon$  es muy pequeña.
- 3) **Variedad estable/inestable** El origen es un punto fijo del sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + z \\ \dot{y} &= -y + z^2. \\ \dot{z} &= z\end{aligned}$$

Encontrar las variedades estable e inestable globales para el origen. Para cada variedad, identificar su dimensión y el correspondiente espacio tangente en el origen.

- 4) **Estabilidad asintótica** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función clase  $C^1$ . Suponer que la divergencia es cero, es decir,  $\nabla \cdot f(x) = 0$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ . Recordar que esta condición implica que el sistema  $\dot{x} = f(x)$  preserva el volumen. Probar que este sistema no puede tener un punto fijo asintóticamente estable.
- 5) **Círculo límite** Considerar el sistema en el plano,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), \\ \dot{y} &= x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}).\end{aligned}$$

- (a) Mostrar que existe una órbita periódica que intersecta el eje  $x$  en el punto  $(1, 0)$ .
- (b) Encontrar el mapeo de Poincaré explícitamente en el eje positivo de las  $x$ .
- (c) Determinar la estabilidad de la órbita periódica