UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

16 de enero de 2017

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Considere el espacio de medida $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$, donde $\mathcal{B}([0,1))$ es la σ-álgebra de Borel en $[0,1)$, y λ es la medida de Lebesgue.

   a) Primero muestre que si $n \geq 1$ es un entero no negativo, entonces n se puede escribir de manera única como:
   $$n = 2^m + k \quad \text{para alguna } k \in \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\} \text{ y } m \geq 0.$$

   b) Defina para toda $x \in [0,1)$, $f_n(x) = 1_{[k/2^m,(k+1)/2^m)}(x)$ si $n = 2^m + k$, como en el inciso a), y sea $f(x) = 0$ para toda $x \in [0,1)$. Demuestre que f_n converge en medida a f, pero que f_n no converge casi en todos a lados a f.

2. (6 puntos) Dar un ejemplo de un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones $\mathcal{F}$-medibles (esto es, $f_n : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ son los borelianos reales), tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para toda $x \in X$, y $\int_X f_n d\mu = 0$ para toda $n \geq 1$, pero que $\int_X f d\mu$ no exista.

3. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $f_n \in L_1(X, \mathcal{F}, \mu)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que si
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty \,,$$
   entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge μ-casi siempre en X a una función integrable f y se cumple que
   $$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \,.$$

4. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p_1, \ldots, p_n \in (1, +\infty)$ tales que

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1\,.$$

Demuestre que para la colección de funciones $\{f_k\}_{k=1}^n$ tal que $f_k \in L_{p_k}(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(k = 1, \ldots, n)$, se cumple

a) $f_1 \ldots f_n \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$

b) $\displaystyle\int_X |f_1 \ldots f_n|\, d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n}\,.$

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Demostrar que para $r > 0$, tan pequeño como se quiera, todos los ceros de la función

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n! z^n} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

están en el disco $|z| < r$ para n suficientemente grande. Una forma de resolver el problema es la siguiente: considérese $\zeta = \frac{1}{z}$, y aplíquese el teorema de Rouché a las funciones $\exp(z)$ y $g_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{\zeta^k}{k!}$.

2. (6 puntos) Sea D una región del plano complejo y f una función análitica en D. Demuestre que si $g = \overline{f}$ es una función analítica en una región $\widetilde{D} \subset D$, entonces f es una función constante.

3. (6 puntos) Sea f una función entera. Demostrar que si existe un número natural n tal que

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^n} < \infty\,,$$

entonces f es un polinomio de grado no mayor a n.

4. (6 puntos) Demuestre que si f es una función meromorfa no constante tal que para todo z no real

$$\frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} > 0\,,$$

entonces los ceros y polos de f son simples y reales.