Examen general de álgebra conmutativa *Enero de 2015*

Nombre de la (el) alumna(o) ______________________________

Escoja y resuelva 5 (y sólo 5) de los problemas siguientes.

1. Sean $\mathfrak{p}$ un ideal primo del anillo conmutativo A e $I, J \subseteq A$ ideales tales que $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ y $J \not\subseteq \mathfrak{p}$. Demuestre que $IJ \not\subseteq \mathfrak{p}$

2. Sean M un A-módulo y $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$, con $x_i \in M$. Demuestre *generar* es una propiedad local, es decir, las afirmaciones siguientes son equivalentes:
(i) $\{x_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq M$ genera M.
(ii) $\{x_i/1\}_{i\in\Gamma} \subseteq M_{\mathfrak{p}}$ genera $M_{\mathfrak{p}}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.
(iii) $\{x_i/1\}_{i\in\Gamma} \subseteq M_{\mathfrak{m}}$ genera $M_{\mathfrak{m}}$, para todo ideal máximo $\mathfrak{m}$ de A.
Donde $x_i/1$ es la imagen canónica de x_i en el módulo localizado correspondiente.

3. Si $f \in A$ y A_f es la localización de A con respecto al conjunto multiplicativo $S = \{f^n \ ; \ n \geqslant 0\}$, demuestre que la función

$$A[t]/\langle ft-1\rangle \longrightarrow A_f$$

dada por $a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \mapsto a_n/f^n + \cdots + a_1/f + a_0$ es un isomorfismo.

4. Si $A \subseteq B$ son anillos con B entero sobre A, demuestre que la función asociada $\operatorname{Spec}B \to \operatorname{Spec}A$ es cerrada.

5. Demuestre que un anillo local $(A, \mathfrak{m})$ de dimensión cero consiste sólo de unidades y elementos nilpotentes.

6. Sean A un anillo, I un ideal de A y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideales de A con $\mathfrak{p}_i$ primo si $i \geqslant 2$. Demuestre que si $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ para todo i, entonces existe un $x \in I$ tal que $x \notin \mathfrak{p}_i$ para todo i.

7. Si A es un anillo de valuación y $\mathfrak{p}$ es un primo de A, demuestre que A y $A_{\mathfrak{p}}$ tienen el mismo campo de fracciones. Demuestre que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo de valuación.