Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2017-II

Instrucciones: Resuelva los problemas 1 al 3, y sólo uno de los problemas 4 ó 5. Por favor, no ponga más de un problema por hoja y escriba su nombre en cada hoja.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variable real, diferenciable, tal que $f(x) \neq 0$ para $x > 1$. Sabiendo que para todo $x \geq 1$ se cumple la relación

   $$\int_1^x f(s)ds = (f(x))^2,$$

   encuentre $f = f(x)$.

2. Determine si las siguientes integrales impropias existen. Argumente su respuesta.

   a)
   $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx.$$

   b)
   $$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx.$$

   c)
   $$\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx.$$

3. Se quiere construir una caja rectangular de cartón que tenga una superficie de 10 m^2 (la cantidad total de material disponible). ¿Cuál es el volumen máximo posible?

4. Suponga que el campo vectorial, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, es continuamente diferenciable y satisface $\operatorname{div}\mathbf{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 > 0$ en el interior de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, abierto y acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie suave (al menos de clase C^1), orientable. Demuestre que $\mathbf{F}$ no puede ser tangente a $\partial\Omega$ en *todo* punto de la superficie $\partial\Omega$.

5. Sea $\mathscr{C}$ la curva en el espacio que se obtiene al intersectar el plano $z = x$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando la vemos desde arriba. Si **F** es el campo vectorial $\mathbf{F} = (x, z, 2y) \in \mathbb{R}^3$, calcule la integral

$$I = \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(*Sugerencia:* Aplique el teorema de Stokes.)