Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen de Diagnóstico - Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2016-II

Instrucciones: Resuelve los problemas 1 al 3, y sólo uno de los problemas 4 ó 5.

1. Aplica el teorema del valor medio para demostrar que
$$x+1 < e^x < 2x+1,$$
si $0 < x \leqq \log 2$.

2. Encuentra $\lim_{n\to\infty} a_n$, donde
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. Considera la semi-esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$:
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad z \geqq 0,\ x^2+y^2 < 1.$$
Suponiendo que nos encontramos en el punto $P_0 = (1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2)$ sobre la semi-esfera, ¿en qué dirección debemos movernos sobre la superficie de modo que:
   (a) la razón de cambio de z sea cero?
   (b) z sea creciente con razón de cambio máxima?
   (c) z sea decreciente con razón de cambio máxima?

4. Sea $f = f(x)$ una función continua de $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que
$$\int_0^x \left(\int_0^u f(s)\, ds \right) du = \int_0^x f(u)(x-u)\, du,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Demuestra que la integral
$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},$$
existe.