Examen de Admisión de Álgebra Lineal

Noviembre 2016

Responda cuatro de los siguientes cinco ejercicios.

Nota: Se calificarán solo los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en las soluciones. Si no quiere que alguno de los que haya escrito se califique, deberá tacharlo o anotar claramente que no debe ser tomado en cuenta.

1. Sea X un conjunto no vacío y F un campo. Considere el espacio vectorial dado por el conjunto $V = \{f : X \to F\}$ con las operaciones usuales. Encuentre una base para el subespacio

$$W = \{f \in V \mid f(x) = 0 \text{ para toda } x \in X \text{ salvo para un número finito de elementos de X}\}.$$

2. Sea F un campo, V un espacio vectorial sobre F de dimensión finita, y T un operador lineal en V distinto de cero y no invertible. Demuestre que existen G y H operadores lineales en V no cero tales que $T \circ G = 0$ y $H \circ T = 0$.

3. Sea F un campo, V y W espacios vectoriales sobre F. Pruebe que si existe una transformación lineal $T : V \to W$ cuyos núcleo e imagen sean de dimensión finita, entonces V es de dimensión finita.

4. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos con un producto interior. Dado S un subconjunto de V se define $S^{\perp} = \{x \in V \mid < s, x >= 0 \text{ para todo } s \in S\}$. Demuestre que:

   (a) El subespacio generado por S está contenido en $(S^{\perp})^{\perp}$.

   (b) Si V es de dimensión finita, entonces $(S^{\perp})^{\perp}$ es el subespacio generado por S.

5. Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales, de dimensión finita n, con $n > 1$. Consideremos T un operador lineal simétrico en V y $< , >$ un producto interior en V. Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores propios de T asociados a valores propios distintos, pruebe que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de V.