Examen General de Topología Diferencial

Semestre II-2018

16 de Junio del 2018

1. El examen durará 4 horas
2. Todas las preguntas tienen igual peso

Instrucciones: Resolver 5 *ejercicios, los marcados con* $(*)$ *son obligatorios.*

(*)1. a) Considere $(\mathbb{R}, Id)$ y $* \notin \mathbb{R}$.
   i) Demuestre que $\{(a,b)\} \cup \{(-c,c) - \{0\}\} \cup \{*\}$ es una base para una única topología de $\mathbb{R} \cup \{*\}$.
   ii) Demuestre que con esa topología es una $1-$variedad topológica.
   iii) Demuestre que no es Hausdorff.

   b) Demuestre que $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tienen atlas de dos elementos cada una, sin embargo no son homeomorfas.

2. Defina en $\mathbb{R}^2$ la relación $(x,y) \backsim (z,w) \Leftrightarrow x - z = n$ y $w = (-1)^n y$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
   a) Pruebe que con esta relación $M = \mathbb{R}^2/_\backsim$ es una $2-$variedad.
   b) Pruebe que M es un $1-$haz vectorial no orientable.

(*)3. a) Sean M^n y N^m variedades conexas sin frontera, demuestre que $M^n \times N^m$ es orientable entonces lo son M^n y N^m.

   b) Considere el mapeo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y,z) = (2x^2+3xy+z^2, x^2-2xy+z^2)$.
   i) Determine los puntos críticos y demuestre que su imagen tiene medida cero (sin usar Sard).
   ii) Demuestre que $(6,0)$ es valor regular y dé $T_{(1,1,1)}f^{-1}(6,0)$.

4. a) Sea $\chi : M \to TM$ un campo vectorial, demuestre que existe $\epsilon : M \to (0,\infty)$ diferenciable tal que $\epsilon(m)\chi(m)$ es globalmente integrable.
   b) Demuestre que la función determinante con dominio en las matrices de $n \times n$ con entradas reales es de Morse si y sólo si $n = 2$.

(*)5. a) Sean X^n, Y^n $\;n-$variedades sin frontera, con X compacta y Y conexa.
   i) Demuestre que si f no es sobre, entonces $gra_2(f) = 0$.
   ii) Pruebe que el recíproco puede ser falso.

6. a) Sean $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $r^m > |a_1|r^{m-1} + \ldots + |a_{m-1}|r + |a_m|$, pruebe que en el disco abierto de radio r con centro en el origen $p(z)$ tiene al menos un cero.
   b) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ diferenciable. Pruebe que f se extiende difeomorfamente al disco cerrado de radio 1 con centro en el origen si y solamente si $gra(f) = 0$.