Examen General de Topología Diferencial

Semestre I-2018

Viernes 19 de enero del 2018 de 9 a 13 hrs.

El alumno escogerá 5 problemas, los marcados con $(*)$ son obligatorios.
Cada problema valdrá 20 puntos de lo que totalizará 100 puntos.

1. a) Demuestre que si M^n es una n-variedad conexa diferenciable y $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, h_i)\}_{i\in I}$ un atlas, existe un atlas $\mathcal{B}$ numerable los cuales generan la misma estructura.

   b) Sea $f : M^n \to N^m$ diferenciable. Demuestre que $\Gamma_f := \{(m, f(m)) \in M \times N\}$ es subvariedad de $M \times N$ y calcule su dimensión.

(*)2. a) Sea $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ subvariedad, demuestre que $TM \cong \{(m, v) \in M \times \mathbb{R}^n | v \in T_mM\}$.

   b) Sean M y N variedades diferenciables sin frontera, demuestre que $M\times N$ es orientable si y sólo si M y N son orientables.

3. a) Demuestre que $\mathbb{R}P^n$ es orientable si y sólo si n es impar.

   b) Demuestre que el encaje $S^{n-1} \subseteq S^n$ induce un encaje $i : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$ y que $\mathbb{R}P^n - i(\mathbb{R}P^{n-1})$ es difeomorfo al disco abierto de radio 1 de dimensión n.

(*)4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ pruebe que:

   a) $M = \{v \in \mathbb{R}^2 |\ vAv^t = 8\}$ es una 1-subvariedad del plano.

   b) Describa a M en el plano y calcule $T_{(-1,1)}M$.

5. Sean M, N y P variedades sin frontera, Z subvariedad de P sin frontera y $F : M\times N \to P$ diferenciable con $F \pitchfork Z$. Para $n \in N$ defina $f_n : M \to P$ como $f_n(m) = F(m, n)$. Demuestre que para casi toda $n \in N$, $f_n \pitchfork Z$.

(*)6. a) Sea $\mathcal{M}(n, n, \mathbb{R})$ las matrices de $n\times n$ con coeficientes reales y $det_n : \mathcal{M}(n, n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función determinante. Demuestre que si $n = 2$, det_2 es de Morse y si $n > 2$ no lo es.

   b) Demuestre que existen dos ceros del mapeo $f(z) = z^2 - e^{-|z|^2}$ con $z \in \mathbb{C}$ dentro del circulo unitario.