Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica (2018-I)
23 de enero de 2018

Nombre:____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7. Duración máxima: 4 horas.

1. (a) Sean $p : E \longrightarrow X$ y $q : T \longrightarrow Y$ aplicaciones cubrientes. Probar que $p \times q : E \times T \longrightarrow X \times Y$ es una aplicación cubriente.

   (b) Sea $\mathbb{RP}^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n. Probar que si $n > 1$, entonces $\pi_1(\mathbb{RP}^n, *) \cong \mathbb{Z}_2$.

2. Considérese el espacio $\mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n$, con $m, n > 1$. Indicar cuántas clases de equivalencia distintas de espacios cubrientes conexos hay sobre $\mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n$ y construir un representante de cada una de las clases.

3. Sea Y un espacio topológico y sea $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Sea $Z = Y \cup_f \mathbb{D}^n$ el espacio de adjunción obtenido al adjuntar a Y la bola $\mathbb{D}^n$ mediante f. Sea R un dominio de ideales principales. Probar que si $n > 0$, entonces $\widetilde{H}_n(Z; R) \cong \widetilde{H}_n(Y; R) \oplus \ker \widetilde{H}_n(f)$.

4. Un nudo K es la imagen de un encaje del círculo $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$. El grupo del nudo se define como $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, *)$. Probar que la abelianización del grupo de un nudo es isomorfa a $\mathbb{Z}$.

5. Sea T_n la superficie orientable de género n. Probar que si $m \neq n$, entonces T_m no es del mismo tipo de homotopía que T_n.

¡Mucha suerte!