Examen General de Teoría de las Gráficas
Semestre 2019-I

Duración: 4 horas. Responder 6 de los siguientes 9 ejercicios (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificarán los 6 primeros).

1. La gráfica de Turán, $T_{k,n}$, es la gráfica k-partita completa con orden n, cuyas partes son iguales o casi iguales, es decir, de cardinalidad $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.

    a) Demostrar que $T_{k,n}$ tiene más aristas que cualquer otra gráfica k-partita completa de orden n.

    b) Determinar el tamaño de $T_{k,n}$

2. Demuestra que G tiene un (x, y)-paseo euleriano si y sólo si x y y tienen grado impar y v tiene grado par, para todo vértice $v \neq x, y$. (Si usas teorema de Euler que caracteriza las gráficas eulerianas, demuéstralo).

3. Demuestra que una gráfica G es bipartita si y sólo si $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}n_H$ para toda subgráfica inducida H de G. (n_H denota el orden de H).

4. Enuncia y demuestra el teorema de Hall. Da un contraejemplo para mostrar que las condiciones en el teorema de Hall no garantizan un apareamiento perfecto en una gráfica arbitraria.

5. Sea G una gráfica plana. Demuestra que $G^{**} \cong G$ si y sólo si G es conexa.

6. Demuestra que para toda gráfica G se tiene que:

    a) $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$.

    b) $\chi(G)\chi(G^c) \geq n$.

7. La digráfica de condensación de una digráfica D, $\mathcal{C}(D)$, es la digráfica cuyos vértices corresponden a las componentes fuertes de D y XY es una flecha en $\mathcal{C}(D)$ si existe una flecha en D con cola en X y cabeza en Y. Demuestra que

    a) la digráfica de condensación de cualquier digráfica es acíclica,

    b) la digráfica de condensación de un torneo es un torneo transitivo.

8. Demuestra que si G es una gráfica que no contiene a K_k, donde $k \geq 2$, entonces el tamaño de G, $m(G) \leq m(T_{k-1,n})$ y la igualdad se cumple si y sólo si $G \cong Tk-1, n$. $Tk-1, n$ es la gráfica de Turán.

9. Demuestra que el número de Ramsey de una gráfica cumple lo siguiente $R(p_1, p_2) \leq R(p_1, p_2 - 1) + R(p_1 - 1, p_2)$.