Examen General de Geometría Diferencial - 2018-1

Lunes 15 de enero del 2018

El examen dura **4 horas.** Resuelva 4 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. a. Muestre que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} j: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t,\theta) & \mapsto & (t\cos\theta, t\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta) \end{array}$$

es un encaje. Denotemos por V su imagen.

b. Sea π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^2$ que a (x,y,z) asocia (x,y). ¿Es la restricción de π a V, $\pi_{|V} : V \to \mathbb{R}^2$, una submersión?

Ejercicio 2. Muestre que el haz tangente $T\mathbb{S}^1$ a la circunferencia unitaria es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Denotemos por (x,y) las coordenadas sobre $\mathbb{R}^2$. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ la proyección. Muestre que existe una única 2-forma ω sobre $\mathbb{T}^2$ tal que

$$p^*\omega = dx \wedge dy.$$

¿Es esta forma cerrada? ¿Es esta forma exacta?

Ejercicio 4. Consideremos el semi-plano $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ con la métrica hiperbólica g dada por $ds^2 = \dfrac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$, y dos funciones $\theta, G : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$ de clase C^∞. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{H}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (x,y) = (v, \theta(u,v)) \end{array}$$

y supongamos $\mathbb{R}^2$ equipado de la métrica g_0 dada por $ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$.

Muestre que existe una única elección para las funciones θ y G, que se podrá dar explícitamente, tal que $F : (\mathbb{R}^2, g_0) \to (\mathbb{H}^2, g)$ sea una isometría, satisface $F(0,0) = (0,1)$, y preserva la orientación inducida sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{H}^2$ por la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 5. Sean M, N variedades riemannianas y $f : M \to N$ un difeomorfismo. Suponga que N es completa y que existe una constante $c > 0$ tal que

$$|v| \geq c|df_p(v)|$$

para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$. Demuestre que M es completa.