Examen General de Geometría Algebraica.

DURACIÓN DEL EXAMEN 4h

CRITERIOS DE EVALUACIÓN: Resolver cinco de estos seis ejercicios. Se necesita resolver correctamente tres o equivalente

**SEMESTRE CORRESPONDIENTE AL EXAMEN (2019-I)

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo K algebraicamente cerrado de característica 0. Usaremos la notación A^n para el espacio afín de dimensión n sobre K y P^n para el espacio proyectivo de dimensión n sobre K.

1. Demuestra que una K-álgebra B es isomorfa al anillo de coordenadas de un conjunto algebraico en A^n para algún n si y sólo si B es una K-álgebra finitamente generada sin elementos nilpotentes.

2. Describe las componentes irreducibles de
$$V := \{(x, y, z) \in A^3 : y^2 = xz, yz = x^3\}.$$
   a) Indica cuáles de ellas son isomorfas a la recta afín.
   b) Indica cuáles de ellas son birregulares a la recta afín.

3. *a*) Sea $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal con r generadores. Demuestra que la dimensión de cualquier componente irreducible del conjunto de ceros de I en A^n es mayor o igual que $n - r$.

4. Sea $\phi : P^2 \to P^2$ el mapeo racional dado por
$$\phi([x : y : z]) = [xy : xz : yz].$$
   a) Determina el dominio de definición de ϕ.
   b) Demuestra que ϕ es birracional siendo ella misma su inversa.
   c) Encuentra un abierto de P^2 tal que la restricción de ϕ a dicho abierto sea isomorfismo.

5. Sean X e Y variedades algebraicas y
$$\rho : X \longrightarrow Y$$
un morfismo. Demuestra que ρ es isomorfismo si y sólo si el mapeo inducido en los anillos locales es un isomorfismo para todo punto P en X.

6. Sea Y el conjunto de ceros en A^2 del polinomio $x^2 + 2xy + y^2 - x^3$.
   Demuestra que el único punto singular de Y es el origen.
   Explota el origen de A^2.
   a) Demuestra que la transformada estricta de Y y el divisor excepcional se cortan en un sólo punto.
   b) Demuestra que la transformada estricta de Y es no singular.