Nombre:____________________________________

No. de cuenta:____________________________________

EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA.

15 de enero de 2018

Sólo resolver 5 de los 6 problemas en 4 horas.

Todos los problemas tienen el mismo puntaje.

I. Probar que la aplicación

$$\phi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \qquad t \to (t^2, t^3, t^6)$$

no es un isomorfismo en su imagen, pese a que es una biyección entre conjuntos. Encontrar las ecuaciones que definen la imagen de ϕ.

II. Probar que la variedad $\mathbb{P}^n - X$ es afín, donde X es una hipersuperficie (no necesariamente lisa). *Sugerencia: aplicación de Veronese.*

III. Demostrar que la hipérbola

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \,|\, xy = 1\}$$

no es isomorfa a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Sin embargo, mostrar que las proyectivizaciones sí son isomorfas. Es decir,

$$\tilde{C} := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \,|\, xy = z^2\}$$

es isomorfa a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

IV. Dados los dos planos $X = V((x_1, x_2))$ y $Y = V((x_3, x_4))$ en $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$, demostrar que el ideal $I(X \cup Y)$ no puede ser generado por dos elementos.

V. Demostrar que un morfismo $f : X \to Y$ es un isomorfismo si y sólo si f es un homeomorfismo (con la topología de Zariski) y para todo punto $p \in X$ el homomorfismo $f^* : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ dado por $f(g) = g \circ f$ es un isomorfismo.

VI. Demostrar que todo isomorfismo $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es una transformación proyectiva. Es decir, está inducida por un automorfismo lineal de $\mathbb{C}^2$ en sí mismo.