

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen de Admisión- Semestre 2020-2
Cálculo Diferencial e Integral

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Cada pregunta vale dos puntos.
- Justifique sus respuestas.
- Por favor no ponga mas de un problema por hoja, numere las hojas y escriba su nombre en cada hoja.

1. Considere la sucesión $\{a_n\}$ para la cual $a_1 = 1$, y $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}$, $n \geq 2$. Demuestre:

a) $\{a_n\}$ es monótona creciente y $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

b) $\{a_n\}$ es acotada por arriba.

c) El límite de la sucesión existe y determine $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2. Determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x^2}$.

3. Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , con $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b) . Demuestre que $f(x)$ se anula a lo más una vez en (a, b) .

4. Demuestre que la ecuación $2x^5 + 8x^3 + 5x - 6 = 0$ tiene una y sólo una raíz real. Grafique la función.

5. ¿La función $f(x) = \frac{x^3}{4} - \text{sen}(\pi x) + 3$ toma el valor $2\frac{1}{3}$ en el intervalo $[-2, 2]$?

6. Si $F(x) = \int_{1-x^2}^{1+x^2} \frac{\text{sen}(2t)}{1+t^2} dt$, $0 \leq x \leq 10$, determine $F'(x)$.