Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Posgrado en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones. Primero resuelva el examen, después escriba y edite sus respuestas en una hoja limpia. No olvide ilustrar con gráficas cada una de sus respuestas. Incluya todo el trabajo o cálculos extras en hojas después de su hoja de respuestas. Los puntajes de cada pregunta están anotados en paréntesis (e.g. n pt). Tiene dos horas para entregar sus respuestas junto con el trabajo extra. Para ello, escriba con su número de cuenta en la esquina superior derecha de cada hoja que entregue, y numere las hojas comenzando por sus respuestas en la esquina superior derecha de cada hoja.

1. Sea $f(x,y)$ una función continua en un conjunto conexo y abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. Suponga que f satisface la ecuación
$$\partial_x y = f(x,y). \tag{1}$$
   a) (2 pt) ¿Tiene soluciones la ecuación (1) en D? Argumente citando los teoremas que sean necesarios.
   b) (2 pt) ¿Qué condiciones tiene que cumplir una solución de la ecuación (1) para x en un intervalo $[a,b]$? Mencione el tipo de función, en qué dominio, etc
   c) (2 pt) Sea R una región acotada dentro de D tal que la ecuación (1) se cumple. Demuestre que $f(x,y)$ es continua y acotada en R. Considere $\theta = \arctan(y/x)$ para cualquier (x,y) que satisface la ecuación (1). ¿Por qué θ no puede ser $\pm\pi/2$ para ningún punto en D, pero si aproximarse a dichos valores para puntos cercanos a la frontera de D. Argumente y asegúrese de ilustrar su respuesta gráficamente (1 pt) y reconsidere su respuesta en la pregunta anterior.

2. Una forma equivalente de estudiar la ecuación (1) y sus soluciones consiste en eliminar las restricciones sobre θ mencionadas arriba. Para ello, es posible definir funciones P y Q en *todo* D que representen las componentes direccionales del cambio $f(x,y)$, de forma que cumplan la condición de Lipschitz en x y en y en alguna vecindad de cada punto en D (¿por qué?). A partir de las observaciones anteriores, considere el sistema autónomo
$$\partial_t x = P(x,y), \quad \partial_t y = Q(x,y), \tag{2}$$
donde $\partial_t x$ y $\partial_t y$ representan, respectivamente, las tasas instantáneas de cambio de x y y con respecto a t, con P y Q como se menciona arriba.
   a) (1 pt) ¿Existen las soluciones del sistema (2)? Argumente.
   b) (2 pt) ¿Cómo es, y que tiene que cumplir una solución al sistema (2)?
   c) (1 pt) Suponga que $P(x,y) \neq 0$ en un subdominio $D' \subset D$. Entonces
$$\partial_x y = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{3}$$
   Demuestre que por cada punto en D', pasa una única curva integral de la ecuación (3).
   d) (2 pt) Sea $(x(t), y(t))$ una solución del sistema (2) tal que $x(t)$ y $y(t)$ no son ambas constantes. Entonces, para cada t_0, la solución que pasa por $(x(t_0), y(t_0))$ define una curva C, llamada *curva característica*, cuya tangente gira contínuamente. Pruebe que por cada punto en D pasa al menos una curva característica.

3. Considere el sistema
$$\partial_t x = x\left(1 - x^2 - y^2\right) + y \tag{4}$$
$$\partial_t y = y\left(1 - x^2 - y^2\right) - x \tag{5}$$
   a) (2 pt) Transforme el sistema a coordenadas polares (r,θ) y obtenga un nuevo sistema de ecuaciones.
   b) (2 pt) Verifique que para k y t_0 escogidos de forma arbitraria,
$$r = \frac{1}{\sqrt{1+ke^{-2t}}} \tag{6}$$
$$\theta = -(t - t_0) \tag{7}$$
   es una solución al sistema (4)-(5) después de escribirlo en forma polar.
   c) (2 pt) Calcule las soluciones para el sistema original usando (6)-(7). Sugerencia: suponga $t_0 = 0$.
   d) (3 pt) Describa graficamente las soluciones en el plano x-y para $k = 0$ y $k \neq 0$.