Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2018-II.
18 de junio de 2018.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 5 de los 8 problemas propuestos. La calificación se determinará con base en los 5 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 5 ejercicios, se calificarán los primeros 5. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos $\mathbb{A}$ son conmutativos con elemento unitario.

1. Demuestra que la topología de Zariski en $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ no es el producto topológico de las topologías de Zariski de $\mathbb{A}^1$.
2. Sea R un anillo. El nilradical de R es el conjunto de todos los elementos nilpotentes de R junto con el cero. Demuestra que el nilradical es la intersección de todos los ideales primos del anillo.
3. Sea $V := V(I) \subset \mathbb{A}^3$ el conjunto algebraico correspondiente al ideal $I = (x^2 - yz, xz - x)$. Encuentra las componentes irreducibles de V.
4. Especifica quienes son: $Spec\,(\mathbb{Z})$, $Spec\,(\mathbb{R})$, $Spec\,(\mathbb{C}[x])$, $Spec\,(\mathbb{R}[x])$ y $Spec\,(\mathbb{Z}[x])$.
5. Muestra que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ si m, n son coprimos.
6. Para $S \subset \mathbb{A}$ un subconjunto multiplicativamente cerrado, demuestra que los ideales primos de $S^{-1}\mathbb{A}$ están en correspondencia uno a uno ($\mathfrak{p} \longleftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p}$) con los ideales primos de $\mathbb{A}$.
7. Caracteriza los n tales que en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ todo divisor de cero es nilpotente.
8. Demuestra que si un ideal I tiene descomposición primaria, entonces $Spec\,(\mathbb{A}/I)$ tiene sólo un número finito de componentes irreducibles.