Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2019-I.
17 de enero de 2019.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

1. Sea $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in R[x]$, el anillo de polinomios sobre el anillo conmutativo con uno R. Decimos que f es un polinomio primitivo si el ideal $(a_0, a_1, ..., a_n) = R$. Demuestra que si $f, g \in R[x]$, entonces fg es primitivo si y sólo si f y g son primitivos.

2. Sea I un ideal en un anillo noetheriano conmutativo con uno R. Demuestra que si $I = Rad(I)$, entonces I no tiene ideales primos encajados, i.e., todos los ideales primos en $Ass\left({}^{R}/_{I}\right)$ son mínimos en ${}^{R}/_{I}$.

3. Sea $\mathfrak{P} \in Spec(R)$ donde R es un anillo conmutativo con uno. La n-potencia simbólica de $\mathfrak{P}$ es el ideal:

   $$\mathfrak{P}^{(n)} = (\mathfrak{P}^n R_{\mathfrak{P}}) \cap R.$$

   Demuestra que $\mathfrak{P}^{(n)}$ es un ideal $\mathfrak{P}$-primario.

4. Con la notación del ejercicio 3, demuestra que $\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^n$ si y sólo si $\mathfrak{P}^n$ es $\mathfrak{P}$-primario.

5. Sean R un anillo noetheriano conmutativo con uno local y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que si M es un R-módulo plano, entonces M es libre.

6. Sean R un anillo noetheriano conmutativo con uno y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que

   $$Supp(M) \subseteq Spec(R)$$

   es un cerrado en la topología de Zariski, donde

   $$Supp(M) := \{\mathfrak{P} \in Spec(R) \mid M_{\mathfrak{P}} \neq 0\}.$$