Examen General de Conocimientos,
Álgebra Moderna.
12 de junio de 2017.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Escoger y resolver solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Enuncia los tres teoremas de isomorfismo y demuestra uno de ellos.

2. Demuestra que si K es un subgrupo normal de G tal que el orden de K y el índice de K en G son primos relativos, entonces K es el único subgrupo de G de orden $\mid K \mid$.

3. Sea G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Demuestra que el número de p-subgrupos de Sylow de G divide al orden de G y es congruente con 1 módulo p.

4. Si G es un grupo de orden $p^k q$ con p y q primos, $p > q$ y $k > 0$, demuestra que G no es simple pero sí es soluble.

5. Demuestra que un grupo de orden p^n, donde p es un primo y n es un natural positivo, es nilpotente.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que son equivalentes para un dominio conmutativo D:
   i) El anillo de polinomios $D[x]$ es un dominio de ideales principales;
   ii) D es un campo.

2. Demuestra que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ no es un dominio de factorización única.

3. Sea $E_{|F}$ una extensión de campos. Demuestra lo siguiente:
   i) Si E está generado sobre F por un número finito de elementos $r_1, ..., r_k$ algebraicos sobre F, entonces E es una extensión finita de F.
   ii) Si $\mathcal{A} = \{a \in E \mid a \text{ es algebraico sobre } F\}$, entonces $\mathcal{A}$ es un subcampo de E.

4. Encuentra un campo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$ y encuentra su dimensión sobre $\mathbb{Q}$.