Examen General de Conocimientos
Álgebra Moderna. Enero de 2016.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Resolver tres ejercicios de la sección Grupos y tres de los ejercicios de la sección Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1 Grupos.

1. Sean $f : G \longrightarrow H$ y $g : G \longrightarrow L$ homomorfismos de grupos con g suprayectivo. Demuestra que si el núcleo de g está incluido en el núcleo de f, entonces existe un único homomorfismo de grupos $h : L \longrightarrow H$ tal que $hg = f$. Además demuestra que $Im(f) = Im(h)$ y que $Ker(h) = g(Ker(f))$. ¿Cuándo es h inyectiva?

2. Demuestra que la colección de los p-subgrupos de Sylow de un grupo finito G forman una clase de conjugación en la colección de los subgrupos de G.

3. Demuestra que si G es un grupo nilpotente entonces todo subgrupo máximo es normal y de índice primo. Demuestra además que si G es finito y cada subgrupo máximo es normal, entonces G es nilpotente.

4. ¿Cuántos 2-subgrupos de Sylow tiene S_4? Demuestra que cada uno de ellos es isomorfo a D_8.

5. Demuestra que todo p-grupo finito es soluble.

2 Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que $\boldsymbol{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ no es un dominio de factorización única.

2. Demuestra que si F es un campo de característica p primo y a es un elemento de F, entonces el polinomio $f(x) = x^p - a$ es irreducible sobre F o es de la forma $f(x) = (x - b)^p$ para alguna $b \in F$.

3. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes en un campo F y sea K una extensión del campo F. Demuestra que el grupo de Galois de $f(x)$ sobre K es isomorfo a un subgrupo del grupo de Galois de $f(x)$ sobre F.

4. Demuestra que el polinomio con coeficientes racionales $f(x) = x^5 - 4x + 2$ no es soluble por radicales.