Examen General de Conocimientos
Álgebra Moderna.
Enero de 2015.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Resolver tres ejercicios de Grupos y tres ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1 Grupos.

1. Demuestra que si K es un subgrupo normal de G tal que el orden de K y el índice de K en G son primos relativos, entonces K es el único subgrupo de G de orden $|K|$.

2. Sea A un subgrupo finitamente generado del grupo aditivo de los racionales. Demuestra que A debe ser cíclico.

3. Sea G un grupo finito de orden p^2 con p primo. Demuestra que o bien G es cíclico o G es isomorfo a $\boldsymbol{Z}_p \times \boldsymbol{Z}_p$.

4. Sea G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Demuestra que el número de p-subgrupos de Sylow de G divide al orden de G y es congruente con 1 módulo p.

2 Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea R un anillo asociativo con 1. Demuestra que R es un anillo con división si y sólo si R no tiene ideales izquierdos propios.

2. Sea K un campo de característica p, primo, y sea $a \in K$. Demuestra que el polinomio $x^p - a$ es irreducible sobre K o se expresa como $(x-b)^p$en $K[x]$.

3. Sea $GF(q)$ el campo finito con q elementos. Demuestra que el grupo de Galois de $GF(p^n)$ sobre $GF(p)$ es un grupo cíclico de orden n.

4. Determina el campo de descomposición del polinomio $f(x) = x^4 + 5x^2 + 5$ sobre los racionales y el grupo de Galois correspondiente. Sugerencia: Verifica que si α es un cero de $f(x)$ también lo es $\alpha^3 + 3\alpha$.