

**Seminario de Posgrado**  
**Los Teoremas de Incompleción de Gödel. Aspectos Matemáticos y Filosóficos**  
**Semestre 2010-1**

**Profesores**

Emiliano Boccardi – Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM – México DF 04510, México –  
[emiliano.boccardi@gmail.com](mailto:emiliano.boccardi@gmail.com)

Mario Gómez Torrente – Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM – México DF 04510, México –  
[mariogt@unam.mx](mailto:mariogt@unam.mx)

**Programa tentativo**

*Parte I. Aspectos Matemáticos (Mario Gómez Torrente)*

**1. Introducción y objetivos**

Esta primera parte ofrecerá una introducción matemática elemental a los teoremas de incompleción de Gödel y a otros teoremas relacionados con ellos. Los objetivos principales son (1) que el estudiante adquiera completa familiaridad con las nociones matemáticas que aparecen en las versiones presentadas de los teoremas de incompleción (satisfacción, verdad, demostrabilidad, consistencia, consistencia- $\omega$ , etc.), (2) que sea capaz de probar con facilidad resultados elementales acerca de esas nociones, y (3) que adquiera una comprensión buena de la estructura y contenido de las pruebas de los teoremas de incompleción.

**2. Secuencia aproximada de temas**

1ª clase (13 de agosto)	Introducción general. Lenguajes para la aritmética elemental, en particular $L_E$ . Sistemas formales. Numeraciones de Gödel.
2ª clase (20 de agosto)	La inexpresabilidad de la satisfacción. Condiciones para la inexpresabilidad de la verdad. Condiciones para la incompleción. Un método para construir oraciones indecidibles.
3ª clase (27 de agosto)	Condiciones para la existencia de puntos fijos para la verdad. La sintaxis precisa de $L_E$ . Una numeración de Gödel. Relaciones $\Sigma_0$ , $\Sigma_1$ , $\Pi_1$ y $\Sigma$ . Su relación con la noción de computabilidad.
4ª clase (3 de septiembre)	La inexpresabilidad de la verdad y la existencia de puntos fijos para la verdad. La Aritmética de Peano con Exponenciación (PE). Aritmetización de las secuencias finitas de expresiones.
5ª clase (10 de septiembre)	La expresabilidad de la demostrabilidad. La incompleción de PE. Construcción de oraciones indecidibles en PE.
6ª clase (17 de septiembre)	La versión original del primer teorema de incompleción de Gödel. Toda relación $\Sigma$ es $\Sigma_1$ . PE es completo- $\Sigma_0$ .

7ª clase (24 de septiembre) PE es completo- $\Sigma_0$ . El segundo teorema de incompleción de Gödel.

### **3. Bibliografía.**

- Boolos, G. y R. Jeffrey, *Computability & Logic*, 3ª ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- Gödel, K., “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I” (1931), en Gödel, *Collected Works*, vol. I, Oxford Univ. Press, Nueva York, 1986 (esta edición también contiene una traducción al inglés).
- Smorynski, C., “The Incompleteness Theorems”, en J. Barwise (comp.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- Smullyan, R., *Gödel’s Incompleteness Theorems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1992.
- Tarski, A., “The Concept of Truth in Formalized Languages” (1935), en Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1956.

### **4. Organización y evaluación.**

Las clases serán los jueves, de las 10 a las 14 horas, en un aula por determinar del Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Las clases consistirán fundamentalmente en explicaciones de nociones matemáticas y demostraciones de teoremas y otros resultados. La estructura de la presentación será parecida a la del libro de Smullyan, pero sus detalles diferirán de los detalles de la presentación de Smullyan, y las explicaciones y demostraciones matemáticas de clase no requerirán el estudio de ningún texto en particular, salvo los apuntes y los papeles volantes distribuidos en clase.

Con una periodicidad aproximada de dos semanas, cada estudiante habrá de contestar a un cuestionario de ejercicios sobre las clases anteriores, con valor de 10 puntos. En general, los ejercicios consistirán en hacer demostraciones y computaciones elementales. La calificación final de la Parte I se basará en la media aritmética de las calificaciones de las respuestas a los cuestionarios. Cada semana de retraso en la entrega de las respuestas a un cuestionario supondrá una penalización de 2 puntos sobre el valor de ese cuestionario.

## **Parte II. Aspectos Filosóficos (Emiliano Boccardi)**

### **1. Introducción y objetivos.**

Esta parte del curso ofrecerá una introducción a algunas consecuencias filosóficas de los teoremas de incompleción de Gödel. Los objetivos principales son que el estudiante sea capaz de argumentar críticamente sobre las implicaciones de los teoremas de incompleción con respecto a: (1) los fundamentos de la matemática (en particular respecto al programa de Hilbert), (2) las teorías computacionales de la mente y (3) las teorías deflacionistas de la verdad.

## 2. *Secuencia aproximada de temas.*

1ª clase (1 de octubre)	Introducción general. Introducción filosófica a los fundamentos axiomáticos de la matemática. El programa de Hilbert y los teoremas de incompleción.
2ª clase (8 de octubre)	No-refutabilidad y no-demostrabilidad del axioma de elección y de la hipótesis del continuo en la teoría de Zermelo-Fraenkel. Consecuencias filosóficas de estos resultados y sus relaciones con los teoremas de incompleción. Pruebas de la consistencia de la Aritmética.
3ª clase (15 de octubre)	Los teoremas de incompleción y las máquinas de Turing. Introducción al mecanicismo. Refutaciones del mecanicismo basadas en los teoremas de incompleción. Introducción a los argumentos de Lucas.
4ª clase (22 de octubre)	Los argumentos Gödelianos de Penrose. Objeciones a los argumentos Gödelianos: respuestas de Feferman, Benacerraf, Lewis y Searle.
5ª clase (29 de octubre)	Contraargumentos de Penrose. Conclusiones.
6ª clase (5 de noviembre)	Los teoremas de incompleción y las teorías axiomáticas de la verdad. Introducción a las teorías deflacionistas de la verdad. Conservatividad. Argumentos Gödelianos en contra de las teorías deflacionistas.
7ª clase (12 de noviembre)	Principios de reflexión. Respuestas deflacionistas a los argumentos Gödelianos. Contraobjeciones y conclusiones.

## 3. *Bibliografía.*

- Boolos, G. (1990) *On Seeing the Truth of the Gödel Sentence*, Behavioral and Brain Sciences, 13 (4), pp. 655-6.
- Lucas, J. (1961), *Minds, Machines and Gödel*, Philosophy, 36, pp. 120-24.
- Penrose, R. (1994), *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*. Oxford University Press.
- Feferman, S. (1995), *Penrose's gödelian argument*, Psyche 2.1.
- Benacerraf, P., *God, the Devil and Gödel*, The Monist, 1967, 9-32.
- Lewis, D., *Lucas Against Mechanism*, Philosophy, XLIV, 1969, 231-233.
- Feferman, S. (1991), *Reflecting on Incompleteness*, Journal of Symbolic Logic, 46: 1-49
- Shapiro, S. (1998), *Truth and Proof – through Thick and Thin*, Journal of Philosophy, 95: 493-52
- Ketland, J., (1999), *Deflationism and Tarski's Paradise*, Mind, 108: 69-94

Tennant, N. (2002), *Deflationism and the Gödel phenomena*, *Mind*, 111: 511-82

#### **4. Organización y evaluación.**

Las clases serán los jueves, de las 10 a las 14 horas, en un aula por determinar del Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Las clases adoptarán la forma de un seminario de lectura y discusión. Consistirán en exposiciones por parte del profesor, basadas en parte en las lecturas asignadas para esa clase, seguidas de una discusión guiada por el profesor y en la que deben participar todos los estudiantes.

Los estudiantes que tomen el curso oficialmente deberán escribir un ensayo de entre 5,000 y 8,000 palabras sobre algún tema relacionado con esta parte del seminario. La nota final de la Parte II se basará en la calidad del ensayo (75%) y en la de las participaciones en clase del estudiante (25%).